数理解析研究所講究録
第 726 巻 1990 年 90-96

多人数資産処分問題の game 解について

(A game solution for a multi-person selling assets problem)

千葉大学 理学部 中神潤一 (Jun-ichi NAKAGAMI)

1. Introduction

多数の player が、それぞれの資産を売却しようと考えている。それぞれの資産価格は、各期の確率変数で観測される。もし、ある期に複数の player が同時に売却しようとすると、売却希望の人数に応じて各自の資産価格が変動する。(例えば、資産を合併することにより資産価格が上がる場合と、競争相手がいることにより資産価格が下がる場合が考えられる。)

本稿では、上記の問題意識を 2 人非ゼロ和 game の停止問題で定式化し、解 (平衡点) の存在と性質を調べるものである。

player を $i,j(i\neq j; i,j=1,2)$ とする (player の数が多くても同様の定式化は可能である)。確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の 4 次元確率変数列 $\{((X_n^i,Y_n^i),(X_n^j,Y_n^j)); n=1,2,\cdots\}$ は各期 (n について) 独立とする。(X_n^i,Y_n^i) と (X_n^j,Y_n^j) は互いに独立とする。$E[X_n^i]<\infty, E[Y_n^i]<\infty (i=1,2)$ とする。$c^i(i=1,2)$ は定数で player i の 1 期当りの観測費用とする。

この確率変数列と費用に対して、次の停止問題を考える。

(a) n 期において player i,j が同時に stop すれば、i は $Y_n^i-nc^i$、j は $Y_n^j-nc^j$ をもらい、観測を停止する。

(b) n 期において player i が stop で、player j が continue ならば、i は $X_n^i-nc^i$ をもらい、観測を停止する。j は $n+1$ 期以後、process $\{X_{n+k}^j; k=1,2,\cdots\}$ に対して 1 人で停止問題を行なう。i.e., j は m 期 $(m>n)$ で stop すれば、$X_m^j-mc^j$ をもらい、観測を停止する。

(c) n 期において player i,j が共に contonue ならば、i,j は $n+1$ 期以後も同じ process $\{((X_{n+k}^i,Y_{n+k}^i),(X_{n+k}^j,Y_{n+k}^j)); k=1,2,\cdots\}$ に対して 2 人で停止問題を行なう。

ここでは、上記の停止問題を非 0 和·非協力 game として扱うので、player i は自分の資産価格 (X_n^i,Y_n^i) だけを各期に観測して、stop か continue の決定を下すものと仮定する。i.e., player i の停止戦略 (stopping straregy) を表現する停止領域 (stopping region) を $S_n^i(\subset R^2)$ とする。これは確率変数 (X_n^i,Y_n^i) の実現値が領域 S_n^i に入れば stop で、入らなければ continue であることを示す。ここで $S_n^i\in\sigma(X_n^i,Y_n^i)$ である。また、(X_n^i,Y_n^i) と (X_n^j,Y_n^j) は独立と仮定したので、S_n^i と S_n^j も互いに独立になる。

注：X_n^i と Y_n^i は独立でなくてよい。例えば、$Y_n^i=\varphi_n^i(X_n^i,\xi_n^i)$ 、但し $\varphi_n^i(\in)\mathcal{B}_2, \xi_n^i$ は (X_n^j,Y_n^j) と独立な確率変数としてよい。

以後、記号の便利のため期の番号 n を逆にする。i.e., 期間 n はあと n 回 process を観測できることを示す。

2．1期間問題の定式化

確率変数 $((X_1^i, Y_1^i), (X_1^j, Y_1^j))$ と与えられた定数 $((I_0^i, J_0^i), (I_0^j, J_0^j))$ に対して、次の様に1期間資産処分問題を定義する。

(a) 1期において player i, j が同時に stop すれば、i は $Y_1^i - c^i$、j は $Y_1^j - c^j$ をもらい、終了する。

(b) 1期において player i が stop で、player j が continue ならば、i は $X_1^i - c^i$、j は $I_0^j - c^j$ をもらい、終了する。

(c) 1期において player i, j が共に contonue ならば、i は $J_0^i - c^i$、j は $J_0^j - c^j$ をもらい、終了する。

player (i, j) の停止領域 (S_1^i, S_1^j) に対して、player i の1期の期待利得 M_1^i が次式で定義される。但し、$\bar{A}$ は A の補集合、$E[X; A] \doteq \int_A x\mu_X(dx)$、$\mu_X$ は X の確率法則とする。

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad M_1^i((S_1^i, S_1^j), (I_0^i, J_0^i)) &= E[Y_1^i - c^i; S_1^i S_1^j] \\
&+ E[X_1^i - c^i; S_1^i \bar{S}_1^j] + E[I_0^i - c^i; \bar{S}_1^i S_1^j] + E[J_0^i - c^i; \bar{S}_1^i \bar{S}_1^j] \,.
\end{aligned}
$$

S_1^i と S_1^j が独立なことより、(1)式は次の表現(2)になる。

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & M_1^i((S_1^i, S_1^j), (I_0^i, J_0^i)) = \\
& E[P(S_1^j)(Y_1^i - I_0^i) + P(\bar{S}_1^j)(X_1^i - J_0^i)\ ;\ S_1^i] + I_0^i P(S_1^j) + J_0^i P(\bar{S}_1^j) - c^i \,.
\end{aligned}
$$

(2)式を見ると、player i の利得は 相手 j の stop する確率 $P(S_1^j)$ だけに依存することが分る。$p_1^j \doteq P(S_1^j)$, $\bar{p}_1^j \doteq P(\bar{S}_1^j) = 1 - p_1^j$ とおく。

もし、player i が 相手 j の stop する確率 p_1^j を知っているならば、i は停止領域 S_1^i を次式(3)の ${}^*S_1^i$ とするのが、i の利得を最大にする。

$$
(3) \qquad {}^*S_1^i(p_1^j) \doteq \{(x, y)\ ;\ \bar{p}_1^j(x - J_0^i) + p_1^j(y - I_0^i) > 0\} \,,
$$

$$
(4) \qquad \partial^* S_1^i(p_1^j) \doteq \{(x, y)\ ;\ \bar{p}_1^j(x - J_0^i) + p_1^j(y - I_0^i) = 0\} \,.
$$

注:i の利得を最大にする停止領域を(3)式の 内部 ${}^*S_1^j$で定義したが、(4)式の境界$\partial^* S_1^i(p_1^j)$をこれに含めてもよい。

注：(3)式の内部 ${}^*S_1^i(p_1^j)$ は p_1^jの値で決る開半平面である。(4)式の 境界 $\partial^* S_1^i(p_1^j)$ は xy− 座標の直線で、点 (J_0^i, I_0^i) を中心として、p_1^jの値が 0 から 1 まで動くとき、縦方向から横方向まで反時計回りに90度回転する。

j の stop する確率が p_1^j のとき、i の停止領域 $^*S_1^j$ が定まる。従って、i の stop する確率 $^*p_1^i$ を p_1^j の関数として次式 (5) で定義できる。

$$(5) \qquad {}^*p_1^i(p_1^j) \doteq P({}^*S_1^i(p_1^j)) .$$

注：確率変数 (X_1^i, Y_1^i) は高々可算個の不連続部分を持つので、、関数 (5) の不連続点は高々可算個である。また右側及び左側極限値 $^*p_1^i(p_1^j \pm 0)$ は次式 (6) を満足する。

$$(6) \qquad P({}^*S_1^i(p_1^j)) \le \ {}^*p_1^i(p_1^j \pm 0) \ \le P(cl^*S_1^i(p_1^j)) = P({}^*S_1^i(p_1^j)) + P(\partial^*S_1^i(p_1^j)) .$$

関数 (5) の不連続点を結んで、連続な graph を作る。この graph において、変数 p_1^j で示した集合値関数を新たに $^*p_1^i(p_1^j)$ と定義する (これを (5') とおく)。すると、(5') 式の関数は変数 $p_1^j(0 \le p_1^j \le 1)$ の集合値関数として連続になる。

(5') の graph 上の任意の点 (p_1^i, p_1^j) に対して、相手 j の stop する確率 が p_1^j であることを知って、自分の stop する確率 が p_1^i となる、player i の最適停止戦略を次の定義 1. より唯一定めることができる。

定義 1.

case(i)：(5) の関数の連続点 (p_1^i, p_1^j) において、player i は

$$(7) \qquad \text{確率 1 で stop する} \quad \text{if } (x,y) \in \text{ 内部}^*S_1^i(p_1^j) , \quad \text{with } \ p_1^i = P({}^*S_1^i(p_1^j)) .$$

case(ii)：(5) の関数の不連続点を結んだ線分上の点 (p_1^i, p_1^j) において、player i は

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\text{確率 1 で stop する} \quad \text{if } \ (x,y) \in \text{ 内部}^*S_1^i(p_1^j) \\ \text{and} \ &\text{確率 } \alpha_1^i(p_1^j) \text{ で stop する} \quad \text{if } \ (x,y) \in \text{境界}\partial^*S_1^i(p_1^j) , \\ &\text{where } \ \alpha_1^i(p_1^j) = \frac{p_1^i - P({}^*S_1^i(p_1^j))}{P(\partial^*S_1^i(p_1^j))} , \ 0 \le \alpha_1^i(p_1^j) \le 1 , \\ &\text{with } \ p_1^i = P({}^*S_1^i(p_1^j)) + \alpha_1^i(p_1^j) P(\partial^*S_1^i(p_1^j)) . \end{aligned}$$

注：この定義 1 の (7)(8) 式で定まる拡張された停止領域を $^*S_1^i(p_1^j)$ と新たに定義する。このとき、停止確率は p_1^iとなる。

注：境界上で stop する確率を α_1^i とすることにより、全体としての stop する確率を指定された $p_1^i = P({}^*S_1^i(p_1^j)) + \alpha_1^i(p_1^j)P(\partial^*S_1^i(p_1^j))$ にすることができる。この考え方は仮説検定における Neyman-Pearson の補題と同じものである。

注：player j についても定義 1 で同様に最適停止領域$^*S_1^j(p_1^i)$ を定義できる。以後、両 player (i,j) の停止領域 $({}^*S_1^i(p_1^j), {}^*S_1^j(p_1^i))$ 等は拡張したものを用いる。

3．1 期間問題の平衡点 (equilibrium point)

この節では、1期間問題における両 player (i,j) の平衡停止戦略を求める。

定理 1. (角谷の不動点定理：例えば [1] p.129 を参照)
Kを R^n上の compact 集合とする。$\mathcal{K}(K)$ を Kの空でない閉凸集合の族とする。このとき、写像 $f: K \to \mathcal{K}(K)$ が上半連続ならば、不動点$^*p \in K$ such that $^*p \in f(^*p)$ が存在する。

(5') 式で定義された写像 $(^*p_1^i(p_1^j), ^*p_1^j(p_1^i))$ は R^nの compact 集合 $[0,1]\times[0,1]$ からこの中への写像として、上半連続である (集合値関数としては連続)。角谷の定理を使えば、次の方程式 (9) の不動点が存在する。

$$(9) \qquad {}^*p_1^i(p_1^j) = p_1^i, \quad {}^*p_1^j(p_1^i) = p_1^j \ .$$

方程式 (9) の不動点を $(^*p_1^i, ^*p_1^j)$ とする。すると、この不動点を player (i,j) の停止確率とする拡張された停止領域 $(^*S_1^i(p_1^j), ^*S_1^j(p_1^i))$ が (7) (8) 式より定まる。従って、以後 player (i,j) の停止戦略を不動点である停止確率 $(^*p_1^i, ^*p_1^j)$ で表現することもある。

1期間問題のまとめとして、次の補題2つを証明なしで述べる。

補題 1. 1期間問題 (M_1^i, M_1^j) ((2) 式で与えられる) を考える。
任意に与えられた定数 $(I_0^i, J_0^i) i = 1,2,$ に対して、(9) 式で定まる停止戦略 $(^*p_1^i, ^*p_1^j)$ は平衡点である。i.e., for $\forall S_1^i \in B_1$,

$$(10) \qquad M_1^i((^*p_1^i, ^*p_1^j), (I_0^i, J_0^i)) \geq M_1^i((S_1^i, ^*p_1^j), (I_0^i, J_0^i)) \ (i = 1,2) \ .$$

補題 2. for $\forall$ given $(S_1^i, S_1^j) \in B_1 \times B_1$,

(11) $M_1^i((S_1^i, S_1^j), (I_0^i, J_0^i))$ は (I_0^i, J_0^i) の非減少関数である。

4. n 期間問題

この節では、n 期間問題における両 player (i,j) の平衡停止政策を求める。

定義 2. 数列 $\{I_n^i; i = 1,2, \ n = 0,1,2,\cdots\}$ の定義。

$$(12) \qquad I_0^i = E[X_0^i] - c^i \ , I_n^i = E[X_0^i - I_{n-1}^i] + I_{n-1}^i - c^i \ .$$

注：(12) 式は player i が1人で確率変数列 $\{X_n^i\}$ に対して停止問題をするときの最適解を示すものである。i.e., n 期の最適停止領域は $\{x; X_n^i > I_{n-1}^i\}$ で、n 期の期待利得は I_n^i (reward with Individual stop) となる。

player i の任意の n 期の停止戦略 $S_n^i (1 = 1,2, \ n = 1,2,\cdots)$ に対して、player i の停止政策 (stopping policy)(停止戦略の列) S^i を次式 (13) で定義する。

$$(13) \qquad S^i = \{S_1^i, \cdots, S_n^i \cdots\} \; (i = 1, 2) \; .$$

player (i, j) の任意の停止政策 (S^i, S^j) に対して、player i の期待利得 $M_n^i (i = 1, 2,\ n = 1, 2, \cdots)$ を次式で定義する。

$$(14) \qquad \begin{aligned} & M_n^i((S_n^i, S_n^j), (I_{n-1}^i, M_{n-1}^i)) \\ & = E[P(S_n^j)(Y_n^i - I_{n-1}^i) + P(\bar{S}_n^j)(X_n^i - M_{n-1}^i) \; ; \; S_n^i] \\ & \quad + I_{n-1}^i P(S_n^j) + M_{n-1}^i P(\bar{S}_n^j) - c^i \; , \\ & \quad \text{where } M_0^i = J_0^i = E[Y_0^i] - c^i \; . \end{aligned}$$

これにより 数列 $\{M_n^i(S_n^i, S_n^j)\}$ が逐次に定義できる。

定義 3. 数列 $\{({}^*p_n^i, {}^*p_n^j);\ n = 1, 2, \cdots\}$ と数列 $\{J_n^i;\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ の定義。
$I_0^i = E[X_0^i] - c^i, J_0^i = M_0^i = E[Y_0^i] - c^i, (i = 1, 2)$ であるので、$(I_0^i, J_0^i)(i = 1, 2)$ を用いた方程式 (9) で不動点 $({}^*p_1^i, {}^*p_1^j)$ を 1 つ定める。この不動点を用いて、次式 (15) より $J_1^i (i = 1, 2)$ を求める。以下、順次に $({}^*p_n^i, {}^*p_n^j)$ と (J_n^i, J_n^j) を求めていく。

$$(15) \qquad \begin{aligned} J_1^i & = M_1^i(({}^*p_1^i, {}^*p_1^j), (I_0^i, J_0^i)) \\ & = E[{}^*p_1^j(Y_1^i - I_0^i) + {}^*\bar{p}_1^j(X_1^i - J_0^i)]^+ + {}^*p_1^j I_0^i + {}^*\bar{p}_1^j J_0^i - c^i \; . \end{aligned}$$

$$(16) \qquad \begin{aligned} J_n^i & = M_n^i(({}^*p_n^i, {}^*p_n^j), (I_{n-1}^i, J_{n-1}^i)) \\ & = E[{}^*p_n^j(Y_n^i - I_{n-1}^i) + {}^*\bar{p}_n^j(X_n^i - J_{n-1}^i)]^+ + {}^*p_n^j I_{n-1}^i + {}^*\bar{p}_n^j J_{n-1}^i - c^i \; . \end{aligned}$$

n 期間問題のまとめとして、次の定理を証明なしで述べる。

定理 1. n 期間問題 (M_n^i, M_n^j) ((14) 式で与えられる) を考える。
(9) 式及び (16) 式で定まる停止政策 $({}^*p^i, {}^*p^j)$ は平衡点である。但し、${}^*p^i = \{{}^*p_n^i;\ n = 1, 2, \cdots\}$ ${}^*p^j = \{{}^*p_n^j;\ n = 1, 2, \cdots\}$ 。 i.e.,
任意の 停止政策 S^i defined by (13) に対して、

$$(17) \qquad \begin{aligned} J_n^i & = M_n^i(({}^*p_n^i, {}^*p_n^j), (I_{n-1}^i, J_{n-1}^i)) \\ & \geq M_n^i((S_n^i, {}^*p_1^j), (I_{n-1}^i, M_{n-1}^i)) \; (i = 1, 2) \; . \end{aligned}$$

注 : (15)(16) 式は、 player (i, j) が 2 人で確率変数列 $\{((X_n^i, Y_n^i), (X_n^j Y_n^j\}$ に対して平衡政策 $({}^*p^i, {}^*p^j)$ を行なったとき、 player i の n 期の平衡期待利得 J_n^i (reward with Jointly stop) を示す。

注：(9) 式で定めた不動点は unique でない。従って、平衡点である停止政策 $({}^*p^i, {}^*p^j)$ は無数に存在する。次の 5 節でこれが unique になる具体的例題を解いて見る。

5. 無限期間問題　　省略

6. 例題 (example)

この節での例題は (9) 式で定めた不動点が unique になるものを考えてみる。

例題の仮定

(a) player i と j は同一分布と同一費用をもつとする (player の区別をしない)。i.e.,

$$X_n^i =^L X_n^j =^L X_n \ , \ Y_n^i =^L Y_n^j =^L Y_n \ , \ c^i = c^j = c \ .$$

但し、$X =^L Y$ は確率変数 X と Y が同一の分布関数をもつことを示す。この仮定 (a) があると (9) の方程式が player i と jで同じになる。

(b) 各期 (n について) 同一分布とする。i.e.,

$$X_n =^L X_{n-1} =^L X, \ Y_n =^L Y_{n-1} =^L Y.$$

(c) $Y = aX(a \in [0, \infty))$ とする。
この仮定 (c) があると (3)(3') で定まる停止領域が半平面 (2 次元) でなく半直線 (1 次元) になる。i.e., 確率変数 Xがある値より大きくなれば stop することになる。
a の値について、次の 2 つの分類が考えられる。
$(0 \leq a < 1)$ 競走相手がいることで自分の資産価値が下がる場合⇒ $J_n \leq I_n$ がいえる。
$(1 \leq a < \infty)$ 相手と資産を合併し自分の資産価値が上がる場合⇒ $J_n \geq I_n$ がいえる。

(d) 確率変数 X は区間 $(0,1)$ の一様分布に従う。$c = 0$ とする。
一般に、確率変数 (X, Y) が Lebesgue 測度に対して密度をもてば、停止領域 ${}^*S_n^i$ は $P(\partial^* S_1^i) = 0$ となり、定義 1 の case(ii) の場合だけになる。また、Xが有界ならば、$c = 0$ でも無限期間問題を考えることができる。

以上の仮定の下で、player (i, j) が同じ政策になる不動点を見つけることにする。

例題の解

(3) の${}^*S$の定義 ：$\bar{p}(x - J)) + p(y - I) > 0$ に仮定 (c) の $y = ax$ を代入する。

$${}^*S = \{x > (pI + \bar{p}J)/(\bar{p} + pa) \doteq^* x\} \ .$$

仮定 (d) の一様分布を代入し、(9) の不動点${}^*p$ を求める。

$${}^*p = P(X >^* x) = 1 -^* x \ .$$

$$(18) \qquad {}^*\bar{p} = ({}^*pI +{}^* \bar{p}J)/({}^*\bar{p} +{}^* pa)\ .$$

(18) の右辺は、${}^*\bar{p}$の値が 1 から 0 まで動くとき、$J(< 1)$ から $I/a(> 0)$ まで変化する。従って、区間 $(0,1)$ の根は奇数個になる。また、(18) は${}^*p$ の 2 次方程式なので、${}^*p$ の区間 $(0,1)$ の根は唯一存在することが保証される。

(18) に $I = I_0 = 1/2,\ J = I_0 = 1/2$ を代入して、2 次方程式から${}^*p_1$を計算する。次式より 1 期の停止領域 ${}^*S_1$ と期待利得 J_1 が得られる。

$${}^*S_1 = \{x > 1 -{}^* p_1\}\ .$$

$$(19) \qquad J_1 = E[{}^*p(aX - 1/2) +{}^* \bar{p}(X - 1/2)]^+ + 1/2\ .$$

上で得られた $J = J_1$ と (12) 式より得られる $I = I_1$を (18) 代入して${}^*p_2$を求め、これを (19) に代入して、2 期の期待利得 J_2を得る。以下同様にして、${}^*p_n$, J_nを計算していく。

参考文献

[1] Store,J. and C.Witzgall, *Convexity and Optimization in Finite Dimentions I,* Springer-Verlag, Berlin, (1970).